

2026 年华东理工大学程序设计竞赛（秋季） 试题分析

ECUSTPC 2026 Fall 裁判组

ECUST

2026 年 9 月 29 日

目录

① 总体

② Problem A – 纽约提喻法

③ Problem B – AIMC 实验室

④ Problem C – 一分为二 2

⑤ Problem D – 位距!?

⑥ Problem E – 根除

⑦ Problem F – 凸包

⑧ Problem G – 星之彼端

⑨ Problem H – 一般攻击魔法

⑩ Problem I – 天外来物

⑪ Problem J – 时间谜题 2

⑫ Problem K – 永世沙漏

⑬ Problem L – 净化行动 3

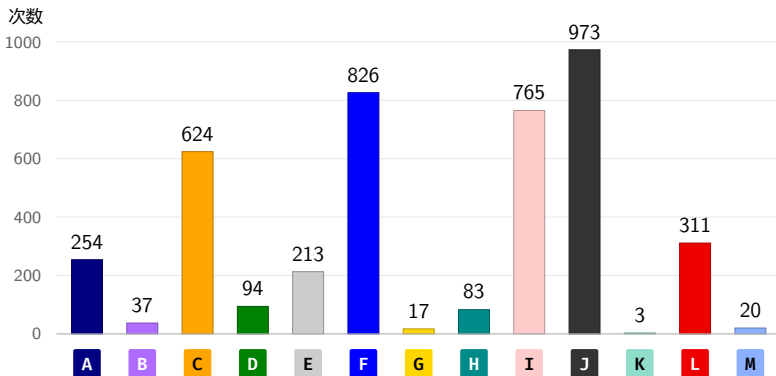
⑭ Problem M – 魔女审判

难度预估

难度	题号
Easy	J F
EasyMedium	C L I
Medium	H A D
MediumHard	E B M
Hard	G K

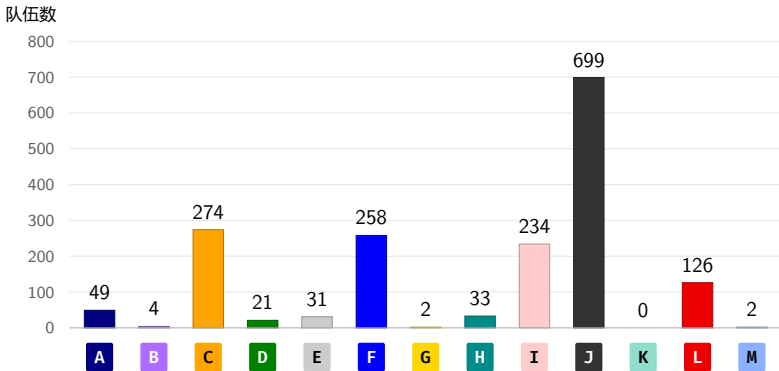
难度与知识点

各题提交次数



线上 826 个参赛选手，不含因各种原因被 DQ 的选手

各题通过队伍数



线上 826 个参赛选手，不含因各种原因被 DQ 的选手

技巧表

题号	核心技巧	题号	核心技巧
A	AC 自动机, 矩阵快速幂	H	建图, BFS
B	二分图, 最小割	I	贪心
C	二分答案, 线性 DP	J	语法
D	构造	K	几何、李超树
E	莫比乌斯反演, 线性筛	L	拓扑排序
F	区间并	M	平衡树
G	启发式算法		

题意概述

试题 **A** 纽约提喻法

长度 $L \leq 10^{18}$ 的小写字符串中，至多 500 个位置被指定字符；
给出总长度不超过 100 的禁止串，求合法字符串数。

AC 自动机

要求字符串中不出现某些特定子串，是经典的 AC 自动机应用场景：

- 将所有禁止子串 s_i 插入到一棵 Trie 树中，若某个节点是某个 s_i 的结尾，将其标记为 $\text{end}=\text{true}$ 。
- 通过 BFS 建立 fail 指针，同时将 Trie 补全为确定的有限状态自动机。
- 在建立 fail 的过程中，需通过 $\text{end}[u] \mid= \text{end}[\text{fail}[u]]$ 将非法状态沿 fail 树向下传递——如果某个节点的状态后缀包含任意禁止串，则该节点本身也是非法状态。

经过处理后，每个合法节点在遇到字符 c 时，都能以 $O(1)$ 的代价确定性地转移到唯一的后继状态。

由于 $\sum |s_i| \leq 100$ ，Trie 树中的节点总数 $V \leq 101$ 。

DP 状态与转移

定义状态： $dp[t][u]$ 表示长度为 t 的合法前缀在 AC 自动机上停留在节点 u 的方案数。

无限制位置转移：

$$dp[t][v] = \sum_u \sum_{c=a}^z [u \xrightarrow{c} v \text{ 且 } v \text{ 合法}] \cdot dp[t-1][u].$$

固定字符位置转移（第 p 位为 c ）：

$$dp[p][v] = \sum_u [u \xrightarrow{c} v \text{ 且 } v \text{ 合法}] \cdot dp[p-1][u].$$

分段与转移矩阵

由于 $L \leq 10^{18}$ ，需要借助矩阵快速幂。

K 个约束位置将整个长度为 L 的字符串划分为最多 $K + 1$ 段无约束的“空白区间”：

$$[1, p_1 - 1], \quad [p_1 + 1, p_2 - 1], \quad \dots, \quad [p_K + 1, L].$$

设转移矩阵为 M ($V \times V$)，其中 $M_{u,v}$ 表示从合法节点 u 走一步能到达合法节点 v 的字符种类数。

预先计算出 $M^{2^0}, M^{2^1}, \dots, M^{2^{59}}$ ，共需约 60 次矩阵乘矩阵 ($O(60 \cdot V^3)$)。

向量倍增与复杂度

维护当前的方案数分布向量 $\mathbf{v}$ (大小为 $1 \times V$, 初始 $\mathbf{v}_{\text{root}} = 1$):

- 跨越长度为 d 的无约束区间时, 将 d 进行二进制拆分, 用向量 $\mathbf{v}$ 依次右乘对应的倍增矩阵 M^{2^j} 。单次转移仅需向量乘矩阵 ($O(V^2)$)。
- 到达受限位置 p_i 时, 仅枚举固定字符 c_i 对应的单步转移更新 $\mathbf{v}$ 。

处理完所有 K 个约束及末尾空白段后, 将向量 $\mathbf{v}$ 中所有合法状态的数值累加即为最终答案。

时间复杂度 $O(V^3 \log L + KV^2 \log L)$ 。

题意概述

试题 B AIMC 实验室

三维网格每个点选择 0/1 态。除了单点奖励外，距离平方为 1, 3 的邻域在满足全异态条件、距离平方为 2 的邻域在满足全同态条件也有奖励。

二分图翻转

注意到每个点与曼哈顿距离为 1, 3 的点需要全部不同才能获得奖励，而距离为 2 的点需要全部相同才能获得奖励。这是一个设计非常刻意的条件。

考虑采用网格图二分图的性质，将所有到 $(0, 0, 0)$ 的曼哈顿距离为奇数的点称作黑点，其余点称作白点。

如果我们将所有白点的 1 态当作 0 态，0 态当作 1 态，三种限制条件都就会变成需要与其他点全部相同才能获得奖励。

最小割建模 (一)

首先, 对于每个点 u , 连从源点 S 到 u 的边和从 u 到汇点 T 连边。

对所有黑点, 与源点连边的最大流量 (后简称权值) 为 $A_1(u)$, 和汇点的连边权值为 $A_2(u)$ 。

对所有白点, 和源点的连边权值为 $A_2(u)$, 和汇点的连边权值为 $A_1(u)$ 。对每个点, 只要割断其中一条边即可使得图不连通。

先考虑 u 与所有与其距离为 1 的点都为 0 态时获得的奖励。
将上述所有点与虚点 v 连一条权值为 $+\infty$ 的边, 而 v 与源点连一条权值为 $A_3(u)$ 的边。

最小割建模 (二)

这部分的含义是：只要有一条代表选择 1 的边还未被割掉， S 就仍然汇经 v 与 T 连通。为此，只能割断权值为 $A_3(u)$ 的边。而如果所有代表 1 的边都被割掉，权值为 $A_3(u)$ 的边就不用割掉。

雷同地，将上述所有点与虚点 w 连一条权值为 $+\infty$ 的边，而 w 与汇点连一条权值为 $A_4(u)$ 的边。这可以表示 u 与所有与其曼哈顿距离为 1 的点都为 1 态时获得的奖励。

剩下的四个条件的建模逻辑相似。

记 $K = NMH \leq 100$ 。每个格点至多有 26 个相关邻点，且引入 6 个辅助节点，因此网络的点数 $V = 7K + 2$ ，边数 $E = O(K)$ 。一般容量网络上 Dinic 的时间复杂度为 $O(V^2E) = O(K^3)$ ，空间复杂度为 $O(K)$ 。容量及答案需使用 64 位整数。

题意概述

试题 C 一分为二 2

任选切分点 k , 得到

$$[a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n].$$

从中选恰好 m 个互不相邻元素, 最大化所选元素的最小值。

二分答案与前后缀

考虑二分答案。问题变成：新数组中能否取出互不相邻的 m 个元素，使得其中最小的大于等于 mid 。

我们递推计算 pre , suf 数组。其中 pre_i 表示 a 的前 i 个数中最多能取出多少个大于等于 mid 且互不相邻的数， suf_i 表示 a 的后 $n - i + 1$ 个数中最多能取出多少个大于等于 mid 且互不相邻的数。

递推与拼合

令 $pre_0 = pre_{-1} = suf_{n+1} = suf_{n+2} = 0$ 。有递推式

$$pre_i = \begin{cases} pre_{i-2} + 1, & a_i \geq mid \\ pre_{i-1}, & a_i < mid \end{cases}$$

$$suf_i = \begin{cases} suf_{i+2} + 1, & b_i \geq mid \\ suf_{i+1}, & b_i < mid \end{cases}$$

最后，拼合前后缀可以得到答案

$$ans = \max_{-1 \leq i \leq n} (pre_i + suf_{i+2}).$$

如果 $ans \geq m$ 则 mid 合法。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

题意概述

试题 **D** 位距!?

构造 $n \leq 5000$ 个平面点，点间距离至少 10^{-4} ，并有至少

$$\left\lfloor \frac{1}{2}n \log_2 n - n \right\rfloor$$

对点的距离在误差范围内恰好为 1。

二进制超立方体投影

令 $K = \lceil \log_2 n \rceil \leq 13$, $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$, 并定义单位向量

$$\vec{v}_j = \left(\sqrt{1 - (\varepsilon 2^j)^2}, \varepsilon 2^j \right) \quad (0 \leq j < K).$$

对 $i = 0, 1, \dots, n-1$, 输出

$$P_i = \sum_{j=0}^{K-1} [i \text{ 的第 } j \text{ 位为 } 1] \vec{v}_j.$$

若仅第 j 位不同, 两点之差为 $\pm \vec{v}_j$, 距离恰为 1。同时 $y(P_i) = \varepsilon i$, 所以不同点的纵坐标差至少 2×10^{-4} 。

单位边计数

每个 i 的每个 1 位可以清零, 得到更小的合法编号并产生一条单位边。因而单位边数至少

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{popcount}(i).$$

令 $n = 2^q + r$, $0 \leq r < 2^q$, 有

$$F(n) = q2^{q-1} + r + F(r).$$

由此归纳得到

$$F(n) \geq \frac{1}{2}n \log_2 n - n,$$

正好达到要求。构造时间 $O(n \log n)$ 。

题意概述

试题 E 根除

定义 $f(n) = \min\{a \mid n = ab^2, a, b \in \mathbb{N}\}$, 查询 $T = 500$ 组

$$\sum_{i=l}^r f(i), 1 \leq l \leq r \leq 10^{12}.$$

数论变形

令 $F(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$, 所求即为 $F(r) - F(l-1)$, 接下来考察如何计算 $F(n)$ 。

称可能为答案的数字为平方自由数, 也即没有平方因子的数字。由 Möbius 函数 $\mu(n)$ 的性质, 可以得出平方自由数示性函数为

$$\mu^2(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 平方自由}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

因此将所有的 n 分解为 $n = ab^2$ 后不难得到

$$F(n) = \sum_{ab^2 \leq n} a\mu^2(a) = \sum_{b \leq \sqrt{n}} \sum_{a \leq n/b^2} a\mu^2(a).$$

记 $G(n) = \sum_{i \leq n} i\mu^2(i)$, 则

$$F(n) = \sum_{b \leq \sqrt{n}} G\left(\left\lfloor \frac{n}{b^2} \right\rfloor\right).$$

考察 G 函数

考虑利用经典的 Möbius 函数的恒等式 $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$, 这个等式可以通过对平方因子容斥得到。
 代入：

$$G(n) = \sum_{i \leq n} i \sum_{d^2|i} \mu(d).$$

交换求和号顺序，拆分 d^2 出来：

$$G(n) = \sum_{d \leq \sqrt{n}} \mu(d) \sum_{i \leq n, d^2|i} i = \sum_{d \leq \sqrt{n}} \mu(d) \sum_{k \leq n/d^2} (kd^2).$$

提出 d^2 ，用三角形数 $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ 优化等差求和：

$$G(n) = \sum_{d \leq \sqrt{n}} d^2 \mu(d) T\left(\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor\right).$$

回到 F 函数

将 $G(n)$ 回代 $F(n)$:

$$F(n) = \sum_{b \leq \sqrt{n}} \sum_{d \leq \sqrt{\lfloor n/b^2 \rfloor}} d^2 \mu(d) T\left(\left\lfloor \frac{\lfloor n/b^2 \rfloor}{d^2} \right\rfloor\right).$$

考虑转化 $\left\lfloor \frac{\lfloor n/b^2 \rfloor}{d^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{b^2 d^2} \right\rfloor, d \leq \sqrt{\lfloor n/b^2 \rfloor} \Leftrightarrow bd \leq \sqrt{n}$:

$$F(n) = \sum_{b \geq 1, d \geq 1, bd \leq \sqrt{n}} T\left(\left\lfloor \frac{n}{(bd)^2} \right\rfloor\right) d^2 \mu(d)^2.$$

这时把 bd 变为 k , 固定 k 后, 枚举 d 讨论 k 的因数:

$$F(n) = \sum_{k \leq \sqrt{n}} T\left(\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor\right) \cdot \left(\sum_{d|k} d^2 \mu(d)\right).$$

预处理因数

再考查 $H(n) = \sum_{d|n} d^2 \mu(d)$, 这是积性函数相乘后做 Dirichlet 卷积还是积性的, 从质数幂角度考虑, 对于任意 $a \geq 1$, 由 $\mu(p^i)$ 在 $i \geq 2$ 时为 0, 有:

$$H(p^a) = \sum_{j=0}^a p^{2j} \mu(p^j) = \sum_{j=0}^1 p^{2j} \mu(p^j) = 1 - p^2.$$

因此 $H(n) = \prod_{p|n} (1 - p^2)$ 。

这个函数需要处理到 $\sqrt{10^{12}} = 10^6$, 但整个过程可以在素数筛中处理:

$$h(ip) = \begin{cases} h(i), & p \mid i, \\ h(i)(1 - p^2), & p \nmid i. \end{cases}$$

最终计算?

回代 $H(n)$ 之后我们可以 $O(\sqrt{n})$ 计算 $F(n)$ 了:

$$F(n) = \sum_{k \leq \sqrt{n}} T\left(\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor\right) \cdot H(k).$$

但这不足以通过本题。

注意观察 $\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor$ 这个式子, 记 $B = \lfloor n^{1/3} \rfloor$:

- 关于 k 这是单调不升的;
- $k \leq B$ 时, k 本身只有 $O(n^{1/3})$ 个, 值的数量亦为 $O(n^{1/3})$;
- $k > B$ 时, $\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor \leq \frac{n}{B^2} = O(n^{1/3})$, 取值个数同样是 $O(n^{1/3})$ 的。

这说明 $\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor$ 取值至多 $O(n^{1/3})$ 个, 考虑对其取值分块。

题意概述

试题 **F** 凸包

给出 n 个严格一元二次不等式

$$a_i x^2 + b_i x + c_i > 0 \quad (a_i < 0),$$

判断是否存在同时满足它们的整数 x 。

每条不等式都恰好是一个区间

因为 $a < 0$, $q(x) = ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是一段开区间, 从中取整数仍然是一段连续区间 (可能为空)。

在本题中, 求解区间边界的方式有多种。最简单的方式是使用 `eps+` 求根公式, 左端点向上取整, 右端点向下取整。

对所有不等式求出其可行区间, 再求交即可。

时间复杂度 $O(n)$ 。

题意概述

试题 **G** 星之彼端

通信题。第一次运行选出 200000 个诱导四元环；第二次收到其中一个环删去任意一点后的三元组，需恢复环编号。

唯一解码条件

若任意两个输出的四元环至多共享两个顶点，则它们不会共享一个三元组。对每个选中环的四个三元组排序后建立哈希表

$$\{\text{三元组}\} \longrightarrow \{\text{输出编号}\},$$

第二次运行即可唯一回答。

因而任务变成：从所有诱导 C_4 中选 200000 个，且四个三元组均不与已选环冲突。

四元环枚举、启发式贪心及其增广

枚举 u ，找到所有从 u 开始且长度为 2 的路径。如果存在终点相同的路径，说明四元环存在。然后判断另外两条边是否不存在即可。用邻接矩阵可 $O(1)$ 判边。

对每个三元组统计被多少四元环拥有，定义四元环的冲突度 = 它 4 个三元组各自被多少个其他四元环共享之和。

按冲突度升序扫描，当前四元环的 4 个三元组都空闲就选它、占用这 4 个三元组。

最后，考虑对答案进行增广。如果一个未选择的环与已选择的环中只有一个矛盾，则将其替换。替换一轮之后再检测是否有新的可加入的环，将这些环加入。

进行一轮增广即可通过。

时间复杂度与一些其他性质

图的平均度数为 $d \approx \frac{2|E|}{|V|}$ ，图中诱导四元环的总数为 C ，时间复杂度 $O(|V|^2 + |V|d^2 + C \log C)$ 。

出题组在本地进行了 1000 组随机图测试。如果将该做法能找到四元环的数量近似看作正态分布的话，此做法无法通过的概率在 10^{-10} 量级。如果采用更多轮次的增广的话，通过率还会更高。

fun fact: GPT Astra 和验题人独立发现了以下做法：更精细地实现贪心策略，用优先队列动态维护冲突数最小的环。这比静态排序效果更优，以至于不需要增广就可以通过全部测试点。当然，对于该做法在随机图上能通过的置信度，出题组不作保证。

题意概述

试题 **H** 一般攻击魔法

空格子可填正斜杠镜、反斜杠镜或保持空，而已有的镜子不能改。判断能否令光线从给定边界位置射入后，恰好从目标位置射出并输出方案。若有解，还需最小化光线经过的格子数；每次进入格子计数一次，重复经过也重复计数。

把每个格子拆成四个节点

每个格子拆为 U, D, L, R 四个节点; 相邻格子对应节点连无向边:

$$R_{i,j} \leftrightarrow L_{i,j+1}, \quad D_{i,j} \leftrightarrow U_{i+1,j}.$$

每个格子对应的连边方法:

填法	内部配对
.	全部六条边
/	U-L, D-R
\	U-R, D-L

所有边权均为 1, 在此松弛图中从入口节点 BFS 到出口节点; 不可达则无解。

从最短路恢复填法

恢复 BFS 的最短简单路径。若路径在空格中使用点对：

$$\begin{array}{l|l} U-D \text{ 或 } L-R & \cdot \\ U-L \text{ 或 } D-R & / \\ U-R \text{ 或 } D-L & \backslash \end{array}$$

就填入对应状态；未经过的格子无需修改。

若最短路在同一空格的四元完全图内使用两次，取第一次和最后一次经过的节点，图中一定有直接边，可以严格缩短路径，矛盾。固定镜子格可能经过两次，但两次使用的配对均由原镜子确定，不会冲突。

为什么最短路就是最少经过格子数

每个节点至多关联一条格间边，简单路径不可能连续使用两条格间边。固定镜子的内部边构成匹配，也不可能连续使用两条内部边；空格内连续使用两条内部边则可以用一条直接边替代，与最短性矛盾。

入口和出口是边界节点，没有格间边。因此最短路按“内部边、格间边、内部边、...、内部边”交替。若经过 k 个格子（重复经过重复计数），路径边数恰为 $2k - 1$ 。

任意合法方案都对应松弛图中的一条路径；而 BFS 最短路可以按上一页恢复为合法方案。因此最短路边数为 D 时，最少经过的格子数为 $(D + 1)/2$ 。时间、空间复杂度均为 $O(nm)$ 。

题意概述

试题 I 天外来物

依任意顺序采集一条链上的水晶。采集一个点会翻转尚未采集的相邻点能量，求最大总能量。

符号系数与奇偶条件

考虑一颗水晶被采集的时候，其权值会被乘以一个系数，这个系数要么是 1，要么是 -1 。

先说结论： -1 的个数的奇偶性一定与 $n - 1$ 的奇偶性相同，且任何一个满足该条件的系数序列都能被取到。

结论的证明 (一)

定义 $n-1$ 个布尔变量 $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$, 其中 $d_i = 0$ 表示第 i 个数比第 $i+1$ 个先取, $d_i = 1$ 则表示第 $i+1$ 个数比第 i 个先取。

定义 n 个布尔变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 其中 $x_i = 0$ 表示第 i 个数被取走时系数为 1, $x_i = 1$ 则表示第 i 个数被取走时系数为 -1 。

有等式

$$x_i = d_{i-1} \oplus d_i \oplus 1.$$

特殊地, $x_1 = d_1$, $x_n = d_{n-1} \oplus 1$ 。

结论的证明 (二)

求和得到

$$\bigoplus_{i=1}^n x_i = (d_1)$$

$$\oplus (d_1 \oplus d_2 \oplus 1)$$

$$\oplus (d_2 \oplus d_3 \oplus 1)$$

...

$$\oplus (d_{n-2} \oplus d_{n-1} \oplus 1)$$

$$\oplus (d_{n-1} \oplus 1).$$

其中, 每个 d_i 都出现了两次, 而 1 恰好出现了 $n - 1$ 次。

因此, x 中 -1 的个数的奇偶性与 $n - 1$ 的相同。

结论的证明（三）

接下来再说明为何任何一个满足该条件的系数序列都能被取到。

首先, $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ 的取值是我们可以任意指定的。由于只有 $n-1$ 对偏序关系且彼此之间不成环, 不可能产生矛盾。

假设我们想要取到的序列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。

令 $d_1 = x_1$, d_1 唯一确定后, d_2 也可唯一确定, 依此类推, 对任意 $1 \leq i \leq n-1$, 我们可以根据 x_i 解得唯一确定的 d_i 。

只要 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ 被确定, 由于 x 中 -1 的个数的奇偶性是确定的, 根据前 $n-1$ 个值的结果, x_n 也是确定的。至此得证。

贪心取最优系数

有了这个结论之后，考虑贪心。如果水晶中负数的个数的奇偶性与 $n - 1$ 的奇偶性相同，那么可以取一个系数序列使得每个数都提供大于等于 0 的贡献。

而如果奇偶性不同，则让绝对值最小的数提供负的权值。时间复杂度 $O(n)$ 。

题意概述

试题 J 时间谜题 2

将非负整数时间 $A:B$ 规范化为唯一的 $0 \leq h < 24$ 、 $0 \leq m < 60$ 的标准时间。

直接按总分钟数取模

两种等价操作都不改变总分钟数

$$60A + B$$

模 $24 \times 60 = 1440$ 的值。因此

$$t = (60A + B) \bmod 1440, \quad h = \left\lfloor \frac{t}{60} \right\rfloor, \quad m = t \bmod 60.$$

也可写作

$$h = (A + \lfloor B/60 \rfloor) \bmod 24, \quad m = B \bmod 60.$$

每组只需 $O(1)$ 。

题意概述

试题 K 永世沙漏

给定逆时针简单多边形，统计稳定方向 d 。需要找到一条垂直于 d 的线 l ，使多边形中每一点都能沿 d 方向直达 l 而不离开多边形。

变换

记对应验证的稳定方向为 α ，我们先讨论 $[0, \frac{\pi}{2})$, $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上的情况做一次等距的顺时针 $\frac{\pi}{2}$ 的旋转变换即可。

这时候记 $t = \tan \alpha$, $t \in [0, +\infty)$ 。

考虑对点坐标做如下的旋转放缩变换：

$$s = x + ty, r = y - tx.$$

s 坐标的方向即为稳定方向直线的法向方向， r 坐标方向即为稳定方向直线的切向方向，约定 s 正方向向右 r 正方向向上。

这时我们只需要找一条对应的直线 $s = k$ 满足条件即可。

我们首先考虑如何判定一个 t 代表一个稳定方向，随后证明这样的 t 数量不多，最后用数据结构优化到 $O(n \log n)$ 。

判定

考虑每一条逆时针的边 $A \rightarrow B$, 记

$$d(t) = r_B - r_A = (y_A - y_B) - t(x_B - x_A).$$

讨论这条边的方向:

- $d(t) > 0$ 时这条边形成一个右边界, 所求的 k 需要满足 $k \leq \min(s_A, s_B)$;
- $d(t) < 0$ 时这条边形成一个左边界, 所求的 k 需要满足 $k \geq \max(s_A, s_B)$;
- $d(t) = 0$ 时不会产生额外的约束。

考虑最右的左边界和最左的右边界, 记:

$$L(t) = \max_{A \rightarrow B, d(t) < 0} (\max(x_A + ty_A, x_B + ty_B))$$

$$R(t) = \min_{A \rightarrow B, d(t) > 0} (\min(x_A + ty_A, x_B + ty_B)).$$

下面证明稳定直线存在也即 t 稳定当且仅当 $L(t) \leq R(t)$ 。

证明判定条件

- t 稳定 $\Rightarrow L(t) \leq R(t)$:
 此时存在一条直线 $s = k$ 满足多边形内任意一点到这条直线都在形内, 考察构成左边界的边上任意一点 X , 向右走还在形内, 因此 $k \geq r_X$ 。
 由点的任意性得到 $k \geq L(t)$, 类似有 $k \leq R(t)$, 这即说明 $L(t) \leq R(t)$ 。
- t 稳定 $\Leftarrow L(t) \leq R(t)$:
 反证, 设存在一个右边界 b_i 在一个左边界 a_j 左边也即 $b_i < a_j$ 。
 由上述, 取任意 $r = m$ 对多边形作截线, 截取出来一定形如 $\cup[l_i, r_i]$ 的若干个连通分量, 但 $s = k$ 又需要在每个区间内, 这说明 $k \in [a_i, b_i]$ 且 $k \in [a_j, b_j]$, 这是矛盾的。
- 上述的分类可能会在一些退化情况 (如截出来是一个点, 这会导致某个点既是左边界又是右边界), 但由连续性取一列迫敛, 这个还是对的。

合法方向数量

上面的方法告诉我们可以用 $O(n)$ 检验一个方向是否是合法的。我们讨论在取一个特定的 t 下在什么情况下合法，这需要我们讨论旋转后 r 坐标绝对值最大的那些点，也即上下包络：

$$U(t) = \max r_i = \max(y_i - tx_i), D(t) = \min r_i = \min(y_i - tx_i).$$

合法的 t 会出现在：

- 两个包络的转折点。这些转折点数量是至多 $O(n)$ 的，因为这些分段函数的斜率是严格单调的，而对应合法稳定直线只有 $O(n)$ 条，可以得到至多变换 $O(n)$ 次。
- 在这些开区间内，上下包络的点是唯一的，考察这唯一的上包络点 $U(t)$ 到稳定直线的垂足，但在多边形内只有这一个点有这个 r ，因此稳定直线过上包络点，同理也过下包络点。由多边形不退化，上下包络不重合，这唯一确定稳定直线。
- 这说明每个转折点形成的区间内至多一条稳定直线，这类稳定直线数量也是 $O(n)$ 的。

优化

由此稳定直线数量是 $O(n)$ 的，这即得到一个朴素的 $O(n^2)$ 的做法。将候选方向 t 排序 $t_1, t_2, \dots, t_m$ ，随后考察所有边的 $d(t)$ ，这是一次的，因此

- $d(t) > 0$ 的一定是一个 t 序列的前缀或后缀；
- $d(t) < 0$ 的也一定是一个 t 序列的前缀或后缀；
- $d(t) = 0$ 不应考虑在内。

这个问题就可以转化为：

- 若干条直线，每条只在候选序列的一个前缀或后缀上有效，求各位置的最大值或最小值。

这启发我们用两次扫描的四棵李超树解决问题。

李超树

第一次扫描从左往右，维护最大值和最小值李超树：

- 在每个 t 维护 $d(t)$ 变为正/负的边，将对应两个点的 $s(t)$ 插入李超树，随后查询对应 $d(t)$ ，得到在所有在这个后缀上有效边的最大值和最小值。

第二次扫描从右往左类似维护在这个前缀上有效边的最大值和最小值。最后合并最大值和最小值，依次判定即可。

由于每个点只插入和查询常数李超树，做法是 $O(n \log n)$ 的。

注意整个做法是完全有理的，可以全整在 128 位整数下完成。

另解是用线段树维护凸包，这个可以在 $O(n \log^2 n)$ 下完成。

题意概述

试题 **L** 净化行动 3

无限棋盘上有若干炮。若同一行或列中两个炮之间恰好隔一个炮，它们互相攻击。每次只能删除当前未受攻击的炮，判断能否删空。

同一行或列的结构

将同一横线或纵线上的炮按坐标排序。

- 若初始有至少 4 个炮，则该线上的每个炮都与相隔一个的炮互相攻击，它们一个也无法删除，答案必为 NO。
- 若恰有 3 个炮，只有两端受攻击；中间炮必须先于两端删除。
- 若至多 2 个炮，没有攻击关系。

删除不会制造新的隔一个炮的攻击关系；只会消灭已有关系。

拓扑序即删除顺序

对每条恰有三个炮的横线或纵线，向中间炮到两个端点各连一条有向边。所有约束同时满足当且仅当有向图无环。

任意拓扑序中，一个点被删前，所有要求它先删除的中间炮都已消失，因而它当前不受攻击；反之任何合法删除顺序也必须遵守这些边。

按 x 、按 y 分组排序后建边，再拓扑排序：

$$O(n \log n)$$

时间、 $O(n)$ 空间。

题意概述

试题 M 魔女审判

树上每个点有一个当前唯一的权值。支持交换点权和翻转特定区间。查询值域 $[l, r]$ 中所有权值所在节点，是否恰好组成两条相交的向上路径的并。

拆分条件

记 p_i 为权值为 i 的点的结点编号。翻译条件，可以总结出这样的充要条件：

- $[l, r]$ 内没有真后代（即不含本身）点（记作极深点）的数量不大于 2。
- 若极深点数量为 1，记其为 x ，区间内的 LCA 为 F 有

$$\text{dep}_x - \text{dep}_F + 1 = r - l + 1.$$

- 若极深点数量为 2，记其为 x 和 y ， $B = \text{LCA}(x, y)$ ， F 定义同上有

$$\text{dep}_x + \text{dep}_y - \text{dep}_B - \text{dep}_F + 1 = r - l + 1.$$

因此要考虑维护的信息是：

- 区间 $[l, r]$ 内极深点。
- 区间 LCA。

合并

不难发现，区间内极深点数量随着区间扩展是单调不下降的，因此我们至多只需要维护 2 个即可，而更多的情况都可以打一个 bad 标记。

而在合并两个集合的时候，新区间内的极深点必然只包含原先两个区间的极深点，合并是至多 $O(1)$ 的。

区间 LCA 维护区间内 DFS 序最大点和最小点，查询额外进行一次 LCA 即可，合并是 $O(1)$ 的，查询会用到一个 $\log n$ 。

考察操作 2 的区间反转，这启发我们用平衡树维护序列 p ，下以 Splay 为例。

Splay 信息

令 Splay 的中序遍历恰好为当前序列 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 。对每个 Splay 子树维护下列信息：

- 子树大小 sz ;
- 子树内所有原树结点的 DFS 序最大点和最小点。
- 至多两个极深点，若超过 2 个则记录一个 bad 标记;
- 区间翻转标记 rev 。

Pushup 的时候，只需要合并左右子树和本身的信息即可，这是 $O(1)$ 的。注意上面的信息只和区间内集合有关，和区间内元素顺序无关，因此 reverse 的时候只需要打上 tag 做左右儿子 reverse 即可，不需要改信息。

Splay 操作

需要支持的操作包括：

- 取序列内第 k 个结点；
- 取 x 在当前序列中的位置；
- 将 $[l, r]$ 暴露为一棵子树；
- 翻转一个区间；

处理给定操作和复杂度

操作 1 即找到树上 x, y 在序列上对应点后将这两个点 splay 到根结点和直接儿子，直接交换 pushup 即可。

操作 2 即为反转。

操作 3 暴露对应区间后直接考察子树信息即可。

Splay 的一次基本操作摊还复杂度为 $O(\log n)$ ，每个题目操作只需要常数次 Splay 操作及 LCA 查询，因此单次操作摊还复杂度还是 $O(\log n)$ 的。

总时间复杂度为 $O((n + q) \log n)$ 。空间复杂度为 $O(n \log n)$ 。

感谢验题人：CirnoNine、SATSKY_2025target_LGM、JerrySyr、MoScenix、Forest5326、yeyuege、XiaoXia、7_divided_by_3、hushuqi_qwq、Hanoko1314、Kendieer (排名不分先后) 对赛题的指正、意见和建议。

感谢 chen_zhe 提供洛谷侧的技术支持。

感谢 yy1120、tumu1t 学长对线下赛场秩序的维护。

感谢你参加这场比赛。