

2022 年湘潭大学程序设计竞赛

赛事命题组

计算机学院 · 网络空间安全学院

May 31, 2022

题目一览

题号	名称	作者	类型	难度
A	社团招新	孙涛	执行	签到
B	字符串	代卓岑	栈	容易
C	排球	代卓岑	杂题	中等
D	香蕉	谢勇	二分	中等
E	孤独的小 Z	赵红博	差分约束	中等
F	摘橘子	代卓岑	DP	中等
G	排列	代卓岑	找规律, 图论	难
H	紧急补给	胡梁宇	数学, 概率	难
I	线段与平面	胡钧	几何, 并查集, 欧拉定理	难
J	在一起	谢勇	树形 DP	中等

提交情况

题号	名称	通过/提交	一血
A	社团招新	176/208	0:03:46 田楚天
B	字符串	130/176	0:14:29 田楚天
C	排球	5/24	2:27:24 聂振华
D	香蕉	24/96	0:36:15 郝一鹏
E	孤独的小 Z	2/6	2:09:58 肖志林
F	摘橘子	8/10	1:03:05 谢雅真
G	排列	0/4	
H	紧急补给	6/8	2:11:57 王文海
I	线段与平面	0/2	
J	在一起	9/31	0:28:21 肖志林

思路

矩阵 $A_{n \times m}$ 。当第 i 个人是第 j 个社团成员时, $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$ 。因为每个社团时奇数个人, 两两社团时偶数个共同成员。所以,

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}$$

$$\Rightarrow \text{rank}(\mathbf{B}) = m \Rightarrow m = \text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) \leq n$$

显然我们可以构造出结果为 n 的方案。

即：每个人组成一个社团，且不参加其他社团。

B. 字符串

思路

- ① 用一个栈处理字符串，依次扫描字符。
- ② 如果栈空或者新字符与栈顶不同，则入栈；
- ③ 如果相同，那么弹栈，计数器 +1。
- ④ 最后，计数器为奇数为 Yes，否则为 No。

C. 排球

思路

标程写法很暴力，各种if-else 和 Magic Number，基本上就是把所有情况列出来。验题人的思路也差不多，使用了比分差值，简化了情况数。

- 1 写判断 2:0 和 2:1 局面的两个函数
- 2 依次判断 2:0,2:1,1:2,0:2 这四种情况

D. 香蕉

思路

我们可以构造至少 k 个相同时的最小情况，必然是 k 个等差为 1 的数列，所有数的个数为 m 。

注意，最后一列可能是不足的。

所以我们可以二分 k ，验算 k 个等差数列的累加和是否大于 n 。

求 k 的上限即可。

E. 孤独的小 Z

思路

典型的差分约束问题。

- 1 按不等式构图。 $a - b \geq c$, 则建一条 b 到 a 的边权为 c 的边;
 $a - b \leq c$, 则建一条 a 到 b 的边权为 $-c$ 的边; 相等就建立两条互到边, 边权为 0 。
- 2 Bellman-Ford 算法求最长路
- 3 累加解向量的值 (可以不用减最小值, 因为必然为 0)

F. 摘橘子

思路

考虑 dp 转移, $dp[i][j]$ 为处理到第 i 位时取得的橘子的数量模 m 为 j 时的方案数, 转移的过程中枚举当前这个橘子树取多少即可, 由于当前橘子树的橘子数量很多, 于是我们可以只枚举当前取得的橘子模 m 的为 p 时的情况, 然后算出当前橘子树中同余 p 时的取法 (就是 $0 + p, m + p, 2m + p, \dots$)。转移方程:

$$\begin{aligned} dp[0][0] &= 1; \\ dp[i][j + k] &+= dp[i - 1][j] * c[k] \end{aligned}$$

$c[k]$ 为当前橘子树取同余 k 个时的取法, 复杂度 $\mathcal{O}(nm^2)$

G. 排列

思路

$N > M$ 时可以贪心构造出结果，所以必然是 Yes。

$N \leq M$ 时，构建二分图，跑二分图匹配即可。

思路

计算分子, 考虑每一个补给点 (x_i, y_i) , 对于每一个所在点 (a, b) 的贡献 $|x - a| + |y - b|$ 。对于每一个生成的贡献函数关于 (a, b) 的图像呈现出倒金字塔状, 通过枚举贡献函数的值来计算所有满足该贡献值的点的个数, 即对于 $t = |x - a| + |y - b|$ 计算每一个 t 条件下, (a, b, x, y) 的个数, 如果没有地图的限制, 显然这样的个数为 $4 \cdot t \cdot M(t > 0)$, 不妨将这样的贡献分为左上, 左下, 右上, 右下, 四个方向来计算, 于是我们可以通过翻转的方式实现归约, 所以我们考虑左下部分, 对于一个固定的 $(x, y), (a, b)$ 需要满足这样的条件:

$0 \leq a \leq x, 0 \leq b \leq y, x - a + y - b = t$, 这样的下限条件和等式条件容易通过容斥的方法取得, 即类似于这样的公式:

$$\text{记 } S(x, y) = \{(a, b) | a \leq x, b \leq y\}$$

则 $S_{\text{ans}} = S(x, y) \setminus [S(0, y) \cup S(x, 0)]$

思路

现在我们加上 t 的等式条件, 考虑:

$$S(x_0, y_0, t_0) = \{(a, b) \mid \leq a \leq x_0, \leq b \leq y_0, a + b = t\}$$

显然 $\text{abs}(S(x_0, y_0, t_0)) = x_0 + y_0 - t + 1 (x_0 + y_0 \geq t)$, 于是, 很容易发现, 这样的和可以通过一步步迭代 t_0 的同时维护 $x_i, y_i, x_i + y_i$ 总数的前缀和即可做到, 总复杂度 $O(N + M)$

I. 线段与平面

思路

平面欧拉定理： $F = 2 - V + E$ 一条线段产生的贡献最多是 1 每条线段与之前的线段产生的不重复的交点个数 -1 就是产生的边的个数，注意通过并查集来判断两条边是否在同一个图形上。另一个细节是把只有一个交点并且两两斜率相同的线段合并成一条线段，不然会算多

六、主 任选

任选一个节点作为根节点，先用树形 dp 求出每个子树的节点数和每个子树到子树根节点的代价

$$\text{sum}_u + \dots = \sum_v \text{sum}_v$$
$$\text{dist}_v = \text{dist}_u - (\text{sum}_u - \text{sum}_v * 2) * w_{uv}, \quad v \text{ 是 } u \text{ 的孩子}$$

注意会爆int。