

黑龙江省赛题解

吉林大学出题组

2020 年 9 月 27 日

1001. August

- 求给定公式围成图形面积
- 考虑到 $\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内的中心对称性
- $\pi a^2 + 4ab$
- 10^{-4} 精度低可乱搞, simpson 或者分成小矩形求和
- 也可以直接看样例猜公式……

1002. Bills of Paradise

- 支持插入、删除、查询后继、查询前缀和的数据结构
- $O(Q \log n)$
- 考虑到所有会出现的数字已知
- 离散化后利用树状数组维护被删除数字位置前缀和，并查集维护被删除数字后继可用数字
- 利用平衡树维护
- 考虑当前子树的总和，查询前缀和时从叶结点向根节点走，仅在从右儿子到父节点时加左儿子的子树和

1003. Cornelia Street

- 求长度相等的 A 和 B
- 字符串 Hash
- 考虑从 $1 \sim n$ 枚举答案长度
- 检查对应哈希值是否只有两种
- 时间复杂度 $O(n \log n)$
- 可以结合 KMP 求最小正周期进行剪枝

1004. Death by Thousand Cuts

- 求平面与棱交点个数概率分布
- 考虑将 D 分割为若干个区间
- 将每个顶点带入平面方程得到若干个 D 值作为端点
- 计算每个区间内的 D 对应几个交点

1005. Everybody Lost Somebody

- 给定 sa 和残缺的 $height$ 数组，求字典序最小原串
- 考虑每个位置字母之间的大小顺序
- 不为 -1 的 $height_i$ 可推出若干 “=” 和 “>”
- 根据 $sa_{i-1} + 1$ 和 $sa_i + 1$ 的排名关系推 “>”
- 建图拓扑排序或差分约束
- 时间复杂度 $O(n^2)$

1006. False God

- 每回合，金将走一次，其余全部步兵都再走一步
- 求最多可以拿下多少个步兵
- 金将向后走一步的操作只有初始位置后边有步兵时有意义，其他情况易证此操作无意义

1006. False God

- 把所有步兵拆成先手点和后手点
先手点为金将走向一个有步兵的位置
后手点为金将操作完后步兵前进一步撞上来送人头
- 讨论每个点可以连向哪些点，表示从这个点的位置出发可以吃掉那个子
- 易证一条路径不会同时经过同一个点所拆开的先手后手点
- 易证建出来的图是一个 DAG，求图上最长路径
- 时间复杂度 $O(n^2)$

1007. Goodbye

- 无操作者为赢家的博弈
- 易知 1 和 p 都是直接赢的局面
- 可以写成两个素数乘积的是必输局面
- 其余情况均可转移到上述必输局面，所以是必胜局面
- 输出最大的必输局面即可

1008. Hate That You Know Me

- 注意到 $(a \oplus b) \bmod 2^{64} = (a \bmod 2^{64}) \oplus (b \bmod 2^{64})$
- 常规套路 $\sum_{i=1}^n \sum_{j|i} j^k = \sum_{j=1}^n j^k \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$
- 数论分块配合 long long 乘法自然溢出即可

1009. InkBall FX

- 初始位置为 $(0, 0)$ 初始速度为 $(1, 1)$ 的球
- 碰撞到某条线段时，该线段会消失
- 求过程中会碰到多少条线段
- 假设目前小球的坐标是 (x, y)
- 对于斜向上和斜向下两种移动方式建立两棵线段树，分别表示以当前坐标为起点，移动后在哪些纵坐标处会碰撞
- 假如我们已经得到了这两颗线段树，我们可以在线段树上简单地取 y 的前驱和后继来得到下一个碰撞点

1009. InkBall FX

- 如果小球斜向上移动，斜向上的碰撞位置是不会变的，而斜向下的碰撞点会持续右移
- 同理如果小球斜向下移动，斜向下的碰撞位置不变，而斜向上的碰撞点持续右移
- 所以每条线段上的碰撞点只会右移
- 将每条线段拆成插入纵坐标和删除纵坐标两个操作
- 排序后顺着小球的移动动态处理即可

1009. InkBall FX

- 小球最多碰撞 n 次，即最多求 n 次前驱或后继
- 每个线段树最多 n 次插入， n 次删除
- 求前驱和后继有单次 $O(\log n)$ 的做法
- 总时间复杂度为 $O(n \log n)$

- 有优先队列的做法，时间复杂度同上

1010. Jingle Bells

- 设每个点的 $\frac{a}{b}$ 为特征值，那么每次贪心从小到大取即可
- 定义阳光树为该子树所有节点都满足阳光节点
- 定义阳光节点为其子树内所有点的特征值都比他大
- 那么当一棵树是阳光树时按照贪心取法一定是答案
- 一个点不是阳光节点时需要递归下去将它变为阳光节点
- 当递归到一个阳光节点时返回
- 当一个非阳光节点的所有儿子都递归完毕之后，此时其所有儿子都是阳光节点，开始合并该节点

1010. Jingle Bells

- 合并节点也是按照特征值从小到大合并
- 一边合并，一边更新特征值，直到满足阳光节点为止
- 当 v 合并到 u 后， v 所有的儿子的父节点为 u
- 合并时，按照合并顺序，可以得到一个操作序列，最终每个点都有一个自己的操作序列（可以为空）
- 最后按照操作序列模拟取点，配合最前面说的贪心取点即可算出答案
- 当操作序列 u 执行取点 v 时，则立即执行 v 的操作序列，直到 v 操作序列执行完毕才返回 u 的操作序列继续操作

1010. Jingle Bells

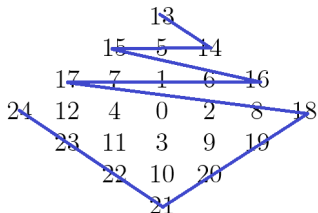
- 合并可以用平衡树启发式合并 $O(n \log^2 n)$
- 左偏树可以做到 $O(n \log n)$
- 验题时发现 $O(n)$ 做法
- 根据特征值从小到大取
- 有父亲的合并，没父亲直接取
- 用并查集维护

1011. Keeping A Secret

- 求符合三个条件的树的个数
- 根据深度分为不同层
- 层内相当于往 n 个格子里填放数字，假设要求放在前 i 个位置的数字个数为 a_i ，层内排好的方案数 $\prod_{i=1}^n (a_i - i + 1)$
- 层与层之间相当于在 b 个各不相同球之间插 $a - 1$ 个隔板
- 注意判断某些细节

1012. Let's Get Married

- 找规律
- $|x| + |y| = K$ 折线上的点值满足



- 最左边点的值为 $2K(K+1)$
- 输入 id 范围可以根据 $\max K$ 算出来，不需要提问

谢谢大家！